PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

Ngô Chí Trung

I. LÝ THUYẾT

Phân tích đa thức thành nhân tử là biến đổi đa thức đó thành một tích của những đa thức. Mỗi thừa số trong tích được gọi là *nhân tử*.

1. Phương pháp đặt nhân tử chung

a. Cách thực hiện

Tìm nhân tử (thừa số) giống nhau trong các hạng tử của đa thức rồi đặt ra ngoài, áp dụng tính chất:

$$A.B + A.C = A(B + C)$$

b. Ví dụ

Phân tích đa thức thành nhân tử:

a. $5x^2 - 20x$; b. $2x^5y - 18x^4y + 54x^3y^2$.

Giải

a. $5x^2 - 20x = 5x.x - 4.5x = 5x(x-4)$.

b. $2x^5y - 18x^4y + 54x^3y^2 = 2x^3y.x^2 - 2x^3y.9x + 2x^3y.27y$

$= 2x^3y\left(x^2 - 9x + 27y\right)$.

2. Phương pháp dùng hằng đẳng thức

a. Cách thực hiện

Phân tích đa thức thành vế trái của các hằng đẳng thức bên dưới rồi áp dụng hằng đẳng thức đó để đưa đa thức về dạng tích.

$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$	$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A+B)^3$
$A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$	$A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A-B)^3$
$A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$	$A^3 + B^3 = (A+B)\left(A^2 - AB + B^2\right)$
	$A^3 - B^3 = (A-B)\left(A^2 + AB + B^2\right)$

b. Ví dụ

Phân tích đa thức thành nhân tử:

a. $8x^3 - 1$; b. $2x^3 - 6x^2 + 18x$;

c. $5x^6y^3 - 20x^2y^3$; d. $x^4 + 8x$.

Giải

a. $8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1^3 = (2x-1)\left(4x^2 + 2x + 1\right)$.

b. $2x^3-12x^2+18x=2x\left(x^2-6x+9\right)=2x\left(x-2.x.3+3^2\right)=2x(x-3)^2$.

c. $5x^6y^3-20x^2y^3=5x^2y^3\left(x^4-4\right)$

$$=5x^2y^3\left(x^2+2\right)\left(x^2-2\right)$$

$$=5x^2y^3\left(x^2+2\right)\left(x^2-\sqrt{2}^2\right)$$

$$=5x^2y^3\left(x^2+2\right)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right).$$

d. $x^4+8x=x\left(x^3+8\right)=x(x+2)\left(x^2-2x+4\right)$.

3. Phương pháp nhóm hạng tử

a. Cách thực hiện

Khi các hạng tử của đa thức không có nhân tử chung, cũng không phải hằng đẳng thức nhưng một số hạng tử của đa thức thì có nhân tử chung hoặc tạo thành hằng đẳng thức thì ta có thể nhóm các hạng tử đó lại.

b. Ví dụ

Phân tích đa thức thành nhân tử:

a. $x^2-x+2y-4y^2$; b. $4x^2+4x+1-4y^2$;

c) $3xy+2z^2-6y-xz^2$; d. $x^2-4xy+xz-2yz+4y^2$.

Giải

a. $x^2-x+2y-4y^2=\left(x^2-4y^2\right)-(x-2y)$

$$=(x+2y)(x-2y)-(x-2y)$$

$$=(x-2y)(x+2y+1).$$

b. $4x^2+4x+1-4y^2=\left(4x^2+4x+1\right)-(2y)^2$

$$=(2x+1)^2-(2y)^2$$

$$=(2x+1-2y)(2x+1+2y).$$

c. $3xy+2z^2-6y-xz^2=(3xy-6y)-\left(xz^2-2z^2\right)$

$$=3y(x-2)-z^2(x-2)$$

$$=(x-2)\left(3y-z^2\right).$$

d. $x^2-4xy+xz-2yz+4y^2=\left(x^2-4xy+4y^2\right)+\left(xz-2yz\right)$

$=\left(x-2y\right)^2+z\left(x-2y\right)$

$=\left(x-2y\right)\left(x-2y+z\right)$.

4. Phương pháp tách hạng tử

a. Cách thực hiện

Khi ba phương pháp đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức và nhóm hạng tử không thể thực hiện được, ta có thể từ một hạng tử nào đó của đa thức biểu diễn thành tổng của hai hạng tử để làm cho đa thức có nhiều hạng tử hơn, từ đó áp dụng hằng đẳng thức hoặc nhóm hạng tử để phân tích đa thức thành nhân tử.

Khi tách một hạng tử thành nhiều hạng tử, ta cần tách sao cho các hạng tử mới có nhân tử chung hoặc tạo thành hằng đẳng thức với các nhân tử cũ.

b. Ví dụ

Phân tích đa thức thành nhân tử:

a. x^2+5x-6;   b. x^3-3x+2;   c. x^4-3x^2+1.

Giải

a. $x^2+5x-6=x^2+6x-x-6=\left(x^2+6x\right)-\left(x+6\right)$

$=x\left(x+6\right)-\left(x+6\right)=\left(x+6\right)\left(x-1\right)$.

b. $x^3-3x+2=x^3-x-2x+2=\left(x^3-x\right)-\left(2x-2\right)$

$=x\left(x^2-1\right)-2\left(x-1\right)=x\left(x-1\right)\left(x+1\right)-2\left(x-1\right)$

$=\left(x-1\right)\left[x\left(x+1\right)-2\right]=\left(x-1\right)\left(x^2+x-2\right)$

$=\left(x-1\right)\left(x^2+2x-x-2\right)=\left(x-1\right)\left[\left(x^2+2x\right)-\left(x+2\right)\right]$

$=\left(x-1\right)\left[x\left(x+2\right)-\left(x+2\right)\right]=\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(x-1\right)$

$=\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)$.

d. $x^4-3x^2+1=x^4-2x^2-x^2+1=\left(x^4-2x^2+1\right)-x^2$

$=\left(x^2-1\right)^2-x^2=\left(x^2-1-x\right)\left(x^2-1+x\right)$

$=\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

5. Phương pháp thêm – bớt hạng tử

a. Cách thực hiện

Khi ba phương pháp đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức và nhóm hạng tử không thể thực hiện được, ta có thể đồng thời thêm và bớt cùng một hạng tử vào đa thức để làm cho đa thức có nhiều hạng tử hơn, từ đó áp dụng hằng đẳng thức hoặc nhóm hạng tử để phân tích đa thức thành nhân tử.

Hạng tử được thêm – bớt vào đa thức phải có nhân tử chung hoặc tạo thành hằng đẳng thức với các hạng tử cũ.

b. Ví dụ

Phân tích đa thức thành nhân tử:

a. x^4+4;   b. x^5+x+1.

Giải

a. $x^4+4 = x^4+4+4x^2-4x^2 = \left(x^4+4x^2+4\right)-4x^2$

$$=\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2=\left(x^2+2-2x\right)\left(x^2+2+2x\right).$$

b. $x^5+x+1 = x^5+x+1+x^4-x^4+x^3-x^3+x^2-x^2$

$$=\left(x^5+x^4+x^3\right)-\left(x^4+x^3+x^2\right)+\left(x^2+x+1\right)$$

$$=x^3\left(x^2+x+1\right)-x^2\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+x+1\right)$$

$$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+1\right).$$

6. Đa thức đặc biệt

a. Tam thức bậc hai ax^2+bx+c

Tam thức ax^2+bx+c chỉ có thể phân tích được thành nhân tử nếu $b^2-4ac\ge 0$.

+ *Phương pháp tách hạng tử bx*

Ta cần tìm cặp số (u, v) thỏa mãn:

$$\begin{cases} u+v=b \\ u\cdot v=a\cdot c \end{cases}$$

Ta có thể nhẩm tìm cặp (u, v) bằng các bước sau:

(1) Phân tích $a\cdot c$ thành tích của hai số: $a\cdot c=u_1\cdot v_1=u_2\cdot v_2=u_3\cdot v_3=...$

(2) Tìm cặp $\left(u_i,\, v_i\right)$ sao cho $u_i+v_i=b$ thì đó là cặp (u, v) cần tìm.

Khi đó tam thức được viết lại: $ax^2+bx+c=ax^2+\left(u+v\right)x+\dfrac{u\cdot v}{a}$

$$ax^2+bx+c=ax^2+\left(u+v\right)x+\frac{u\cdot v}{a}=ax^2+ux+vx+\frac{u\cdot v}{a}$$

$$=x\left(ax+u\right)+\frac{v}{a}\left(ax+u\right)=\left(ax+u\right)\left(x+\frac{v}{a}\right)$$

+ *Phương pháp bình phương đủ:*

Ta thêm - bớt vào tam thức một lượng $\frac{b^2}{4a}$ vào đa thức rồi đặt a ra làm thừa số chung để đưa tam thức thành $ax^2+bx+c+\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a}=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$, khi đó tiếp tục biến đổi tam thức sẽ thành:

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c+\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a} &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\\
&= a\left(x^2+2.\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)
\end{aligned}$$

* *Chú ý*: Phương pháp bình phương đủ được thực hiện khi ta không thực hiện được phương pháp tách hạng tử bx.

b. Một số dạng đa thức bậc bốn

+ Dạng 1: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+e$ trong đó **a + d = b + c**

$$\begin{aligned}
&(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+e\\
&=[(x+a)(x+d)][(x+b)(x+c)]+e\\
&=\left[x^2+(a+d)x+ad\right]\left[x^2+(b+c)x+bc\right]+e
\end{aligned}$$

Sau đó biến đổi $\left[x^2+(a+d)x+ad\right]\left[x^2+(b+c)x+bc\right]$ về dạng $(A+B)(A-B)$ để áp dụng hằng đẳng thức $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$. Trong đó:

$$A=x^2+(a+d)x+\frac{ad+bc}{2};\ B=\frac{ad-bc}{2}$$

+ Dạng 2: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+ex^2$ trong đó **ad = bc**

$$\begin{aligned}
&(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+ex^2\\
&=[(x+a)(x+d)][(x+b)(x+c)]+ex^2\\
&=\left[x^2+ad+(a+d)x\right]\left[x^2+bc+(b+c)x\right]+ex^2
\end{aligned}$$

Sau đó biến đổi $\left[x^2+ad+(a+d)x\right]\left[x^2+bc+(b+c)x\right]$ về dạng $(A+B)(A-B)$ để áp dụng hằng đẳng thức $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$. Trong đó:

$$A=x^2+ad+\frac{(a+b)+(c+d)}{2}x;\ B=\frac{(a+d)-(b+c)}{2}x$$

+ Dạng 3: $(x+a)^4+(x+b)^4+c$

Đặt $y=x+\frac{a+b}{2}$ thì có thể biến đổi đa thức đã cho thành my^4+ny^2+p, sau đó tiếp tục biến đổi đa thức thu được như là tam thức bậc hai đối với y^2.

+ Dạng 4: $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ trong đó $\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{a}}=\left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{b}}\right)^2$

Đặt x^2 làm nhân tử chung rồi đặt ẩn phụ $y=x+\frac{d}{bx}$ thì có thể biến đổi đa thức đã cho thành my^4+ny^2+p, sau đó tiếp tục biến đổi đa thức thu được như là tam thức bậc hai đối với y^2.

c. Ví dụ

Phân tích đa thức thành nhân tử:

a. $(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)-24$; b. $(x+2)(x+4)(x+6)(x+12)-165x^2$

c. $x^4+(x+2)^4-82$; d. $x^4-3x^3-6x^2+3x+1$.

Giải

a. $$\begin{aligned}(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)-24 &= [(x+4)(x+1)][(x+3)(x+2)]-24\\ &=\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)-24\\ &=\left[\left(x^2+5x+5\right)-1\right]\left[\left(x^2+5x+5\right)+1\right]-24\\ &=\left[\left(x^2+5x+5\right)^2-1\right]-24\\ &=\left(x^2+5x+5\right)^2-25\\ &=\left(x^2+5x+5-5\right)\left(x^2+5x+5+5\right)\\ &=x(x+5)\left(x^2+5x+10\right).\end{aligned}$$

b. $\left(x+2\right)\left(x+4\right)\left(x+6\right)\left(x+12\right)-165x^2$

$$=\left[\left(x+2\right)\left(x+12\right)\right]\left[\left(x+4\right)\left(x+6\right)\right]-165x^2$$

$$=\left(x^2+14x+24\right)\left(x^2+10x+24\right)-165x^2$$

$$=\left(x^2+24+14x\right)\left(x^2+24+10x\right)-165x^2$$

$$=\left[\left(x^2+24+12x\right)+2x\right]\left[\left(x^2+24+12x\right)-2x\right]-165x^2$$

$$=\left[\left(x^2+24+12x\right)^2-\left(2x\right)^2\right]-165x^2$$

$$=\left(x^2+24+12x\right)^2-4x^2-165x^2$$

$$=\left(x^2+24+12x\right)^2-169x^2$$

$$=\left(x^2+24+12x-13x\right)\left(x^2+24+12x+13x\right)$$

$$=\left(x^2-x+24\right)\left(x^2+25x+24\right)$$

$$=\left(x^2-x+24\right)\left(x^2+x+24x+24\right)$$

$$=\left(x^2-x+24\right)\left[\left(x^2+x\right)+\left(24x+24\right)\right]$$

$$=\left(x^2-x+24\right)\left[x\left(x+1\right)+24\left(x+1\right)\right]$$

$$=\left(x^2-x+24\right)\left(x+1\right)\left(x+24\right).$$

c. $x^4+\left(x+2\right)^4-82$

Đặt: $y=x+\dfrac{0+2}{2}=x+1\Rightarrow\begin{cases}x=y-1\\x+2=y+1\end{cases}$

Đa thức thành:

$$\left(y-1\right)^4+\left(y+1\right)^4-82=\left(y^4-4y^3+6y^2-4y+1\right)+\left(y^4+4y^3+6y^2+4y+1\right)-82$$

$$=2y^4+12y^2+2-82=2\left(y^4+6y^2-40\right)$$

$$=2\left(y^4+10y^2-4y^2-40\right)=2\left[\left(y^4+10y^2\right)-\left(4y^2+40\right)\right]$$

$$=2\left[y^2\left(y^2+10\right)-4\left(y^2+10\right)\right]=2\left(y^2+10\right)\left(y^2-4\right)$$

$$=2\left(y^2+10\right)\left(y-2\right)\left(y+2\right).$$

Thay $y=x+1$ ta được: $2\left(x^2+2x+11\right)\left(x-1\right)\left(x+3\right)$.

d. $x^4-3x^3-6x^2+3x+1 \; = x^2\left(x^2-3x-6+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$$= x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}-3x+\frac{3}{x}-6\right)$$

$$= x^2\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x-\frac{1}{x}\right)-6\right]$$

Đặt: $y=x-\frac{1}{x}$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$

Đa thức thành:

$$x^2\left(y^2+2-3y-6\right)=x^2\left(y^2+y-4y-4\right)$$

$$=x^2\left[y\left(y+1\right)-4\left(y+1\right)\right]$$

$$=x^2\left(y+1\right)\left(y-4\right)$$

Thay $y=x-\frac{1}{x}$ ta được: $x^2\left(x-\frac{1}{x}+1\right)\left(x-\frac{1}{x}-4\right)=\left(x^2-1+x\right)\left(x^2-1-4x\right)$.

II. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Phân tích đa thức thành nhân tử:

a. $x^2+xy-2x$; b. $4x^2y+2x^2y^3-6x^3y^2$; c. $4\left(x-y\right)+3x\left(x-y\right)$.

Bài 2. Phân tích đa thức thành nhân tử:

a. $2x^2-4xy+2y-x$; b. $x^2-9+xy+3y$;

c. x^2y+x^2+xy-1; d. $x^3-x+2y-8y^3$.

Bài 3. Phân tích đa thức thành nhân tử:

a. $7x^2y^3-7xy^4-21xy^3+21y^4$; b. $4x^3y^5-4x^2y^5+8xy^5-32y^5$;

c. $x^4y-3x^3y-24x^2y+8x^3y$; d. $2x^3-6x^2-20x$.

Bài 4. Phân tích đa thức thành nhân tử:

a. $a^3+b^3+c^3-3abc$; b. $\left(a+b+c\right)^3-a^3-b^3-c^3$;

c. x^3-4x^2+5x-6; d. x^3-7x+6.

Bài 5. Chứng minh rằng:

a. x^5+x-1 chia hết cho x^2-x+1; b. $x^{10}+x^5+1$ chia hết cho x^2+x+1;

c. x^8-x+1 chia hết cho x^2-x+1.

Bài 6. Phân tích đa thức thành nhân tử:

a. $x^2 + 9x + 20$; b. $x^2 - 11x + 28$; c. $2x^2 - 5x + 2$;

d. $3x^2 - 7x + 2$ e. $2x^2 + 11x + 15$; f. $5x^2 - 13x + 6$.

Bài 7. Phân tích đa thức thành nhân tử:

a. $\left(x+2\right)\left(x+4\right)\left(x+6\right)\left(x+8\right) - 20$; b. $(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 6x + 8) + 1$;

c. $\left(x-2\right)\left(x+6\right)\left(x-3\right)\left(x+9\right) + 3x^2$; d. $\left(x-3\right)\left(x+1\right)\left(x-15\right)\left(x+5\right) + 63x^2$.

Bài 8. Phân tích đa thức thành nhân tử:

a. $\left(x+4\right)^4 + \left(x+6\right)^4 - 2$; b. $\left(x+4\right)^4 + \left(x+2\right)^4 - 82$;

c. $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50$; d. $4x^4 + 12x^3 + 47x^2 + 12x + 4$.

⁂